A-Level Pure Math Note Part A (Algebra)

A1 數學語言 ： 數集

一般來說，集是用大字母來代表的而小字母則代表元素。

以下是一些常用的數集及其代表符號：

自然數集	N *e.g 1,2,...*	實數集	R *(即：數軸上的數)*
整數集	Z；I	複數集	C
有理數集	Q *(即：可寫成分數的數，不包 $\sqrt{2}$)*		

A2 函數

2.1 函數及其圖像

應教導學生認識清楚函數的定義，但函數的嚴格定義可不需深究，並可採用下列方式來說明函數的定義：　$\boxed{f：A \to B，f\text{ 為一由 } A \text{ 至 } B \text{ 的函數}}$

假若 A 集中的每一元素均以某種方式匹配 B 集的唯一元素。$\boxed{A\text{ 集稱為 } f \text{ 的定義域}}$，$\boxed{B\text{ 集稱為 } f \text{ 的值域}}$。因函數 f 關係而對應於 A 集中元素 x 的 B 集元素，通常用 f(x) 表示，並稱為 x 在函數 f 下的像。f[A] 則稱為 A 集在函數 f 下的像點集。在此，真值函數的意義須特別強調，因為它們在本課程的其他單元中有廣泛使用，學生並須懂得如何繪畫函數的圖像。

2.2 函數的性質及運算

學生應該清楚知道內射、滿射和對射函數的定義，並能將它們分辨和將它們應用於解答有關問題。教師可採用下列提供的方法：

函數　$f：A \to B$ 為

(i) $\boxed{\text{內射}}$(一個對一個)若且僅若對集 A 中的元素 a_1、a_2，$a_1 \neq a_2$ 蘊涵 $f(a_1) \neq f(a_2)$，或者等價地，$f(a_1) = f(a_2)$ 蘊涵 $a_1 = a_2$；

(ii) $\boxed{\text{滿射}}$若且僅若 $f[A] = B$；
(B 集之中的每一元素均為 A 集之中某一元素的像點。)

(iii) $\boxed{\text{對射}}$(一一對應)若且僅若 f 為一內射和滿射函數。

此時，教師應該已替學生在反函數 f^{-1} 的定義做好了預備，並可以推論出下列性質：

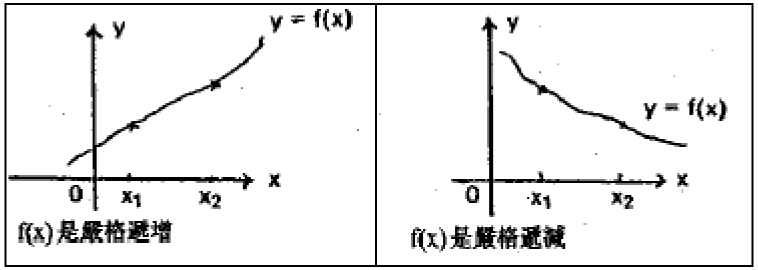
$\boxed{f\text{ 為一對射函數若且僅若其反函數 } f^{-1} \text{ 存在。}}$

再者，函數與其反函數(如存在的話)的圖像僅為直線 $y = x$ 上的反射。這個性質應利用足夠的例子來加以說明。

學生應懂得分辨$\boxed{\text{奇函數、偶函數、週期函數、遞增和遞減函數}}$。對於這些函數，應給予學生清楚的定義。至於遞增和遞減函數的定義，在未曾學習微分法之前，可採納以下提供的定義：

(i) f(x) 為一遞增函數(嚴格遞增)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ $((f(x_2) > f(x_1))$；

(ii) f(x) 為一遞減函數(嚴格遞減)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ $((f(x_2) < f(x_1))$。

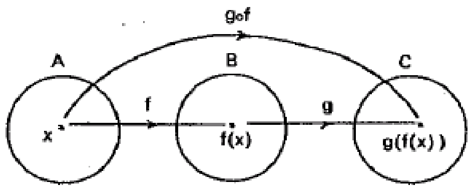


這些性質對繪畫曲綫和計算定積分均甚為有用。

對於函數的運算，教師應與學生討論下列各點：設 f、g 為函數，則 $f+g$、$f-g$、$f \times g$ 及 f/g (在考慮範圍下的所有 x，$g(x) \neq 0$)均為函數。

至於複合函數，因為它們在微分學中對學習鏈式法則極為重要，故需要給予學生足夠的例子，以便他們能夠掌握複合函數的概念。教師可引用以下例子，並列舉其他真值函數的例子作為解釋。

若函數 $f：A \to B$ 及 $g：B \to C$ 則 f 與 g 的複合函數為 $g \circ f：A \to C$ 及對 A 集內所有元素 x，$g \circ f(x) = g(f(x))$。



2.3 代數函數

學生應對下列的代數函數有所認識：

(*a*) 多項式函數；

(*b*) 有理函數；

(*c*) 冪函數 x^α，其中 α 為有理數；

(*d*) 由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他代數函數，例如 $\sqrt{x^2+1}$。

2.4 三角函數及公式 ： 略...(請參考會考附加數學三角學)

2.5 指數函數及對數函數

學生應對指數函數和對數函數之間互為反函數的關係有所認識。對數的定義需加以溫習：

$\boxed{\log_a x = y \text{ 若且僅若 } x = a^y \text{ 其中 } a>0 \text{ 和 } a\neq 1\text{。}}$

對於包含有變數 x 的對數函數，學生應知道它們其實祇是 logx 或函數 f(x) 的對數函數而已。例如：$(\log_{10}x)^2$ 和 $\log_e(1+\tan x)$ 等。

對數函數的一些特性應加以學習。

設 $f(x)=\log_a x$，其中 $a>0$ 和 $a\neq 1$；

(i) f(x) 祇在 $x>0$ 上能夠定義；

(ii) 當 $a>1$ 時，f(x) 是一遞增函數，而當 $0<a<1$ 時，f(x) 是一遞減函數；

(iii) 當 b、$c>0$ 及 $b\neq 1$，$\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$；

(iv) $f(a)=\log_a a = 1$；

(v) $f(1)=\log_a 1 = 0$。

對於指數函數，應教導學生相應的處理方法。設 a 為一正常數和 x 為一變數，則函數 a^x 為一指數函數。其特性為：

設 $f(x)=a^x$　其中 $a>0$ 和 $a\neq 1$，

(i) f(x) 對所有實數均可定義；

(ii) 當 $a>1$ 時，f(x) 為遞增函數而當 $0<a<1$ 時，f(x) 則為遞減函數；

(iii) $f(0)=a^0=1$。

學生應懂得繪畫下列圖像：

(i) 對數函數

$f(x)=\log_a x$　當 $a>1$ 和 $0<a<1$

(ii) 指數函數　當 $a>1$ 和 $0<a<1$

在此時，教師可引領學生去擴闊他們在對數函數和指數函數的認識。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(ii) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}} = e$ 和

(iii) $\displaystyle\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$。

〔請注意 (iii) 僅為對數函數的另一定義而已，$\log_e x$ 可寫為 $\ell n\,x$〕

對數函數和指數函數的性質應予討論。

對數函數　$f(x)=\log_a x$　其中 $a>0$，$a\neq 1$，	指數函數　$g(x)=a^x$　其中 $a>0$
(i) $f(x)+f(y)=f(xy)$	(i) $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$
(ii) $f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})$	(ii) $g(x-y)=\frac{g(x)}{g(y)}$
(iii) $f(x^n)=nf(x)$	(iii) $g(nx)=(g(x))^n$

至於函數 e^x 和 $\ell n\,x$ 在學習數學時的重要性應加以指出。

A3 數學歸納法

教師應舉不同例子示範數學歸納法之應用，例子宜包括級數和、整除性及一些不等式的證明。數學歸納法原理在不同情況下有不同的變更。教師可用例子說明去證明命題一定要同時滿足數學歸納法的兩個條件，缺一不可。其他應用包括證明：

(i) 正整指數的二項式定理

(ii) 棣美弗定理，其中 n 為正整數

(iii) 一些和行列式及方陣有關的命題

(iv) 萊布尼茲定理及一些和 n 階導數有關的命題

作為較深入的研究，教師可以和學生討論一些需要用歸納法的其他形式之情況。

例：	x^n+y^n 可被 $x+y$ 整除，其中 n 為奇正整數。
例：	斐波那契序列定義如下： $a_0 = 0$，$a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$，其中 n 為自然數。 證明 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$。

教師應指出有必要修改數學歸納法原理才能證明上述兩例子。教師宜討論一些以遞推公式定義的序列例子。

A4 不等式

4.1 絕對不等式

學生應能正確地運用符號 $a>b$ 及 $a\geqslant b$。教師應和學生溫習不等式的基本性質，其中應包括

(i) 對一任意實數 x，$x^2\geqslant 0$
(ii) 若 $a>b>0$ 及 n 為一正整數，則 $a^n>b^n$ 及 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$
(iii) 若 $a>b>0$ 及 $x>y>0$，則 $ax>by$；

惟無須涉及這些基本性質之嚴謹證明。學生應能從這些基本性質推算出簡單的絕對不等式。處理絕對不等式的證明，教師可強調以下的技巧：

例：證明 $E_1 \geqslant E_2$

證：$E_1 - E_2 = \cdots$

$= \cdots$

$= \cdots$

$\geqslant 0$

$\therefore E_1 \geqslant E_2$

4.2 A.M. ≥ G.M.

作為 A.M. ⩾ G.M. 的初步認識，教師可提供最多至四個變數的證明，而不強調此定理的一般性證明。若有需要，教師可用反向歸納法去證明此定理。學生須要懂得如何運用此結果至 n 個變數。

4.3 柯西 － 許瓦爾茲不等式

學生應理解二次式 ax^2+bx+c 恒為正數的充要條件為 $a>0$ 及 $b^2-4ac<0$，並應能利用此結果去解如「若 $cx^2+4x+c+3$ 恒為正數，其中 x 為實數，求 c 之範圍。」的問題。柯西——許瓦爾茲不等式可從上述結果證明。

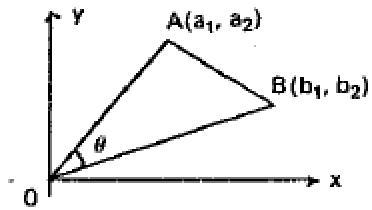
$n=2$ 的柯西——許瓦爾茲不等式的幾何意義可從坐標平面得出。

$$\cos\theta = \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{20A\cdot OB}$$

$$= \frac{(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}{2\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

$$= \frac{(a_1b_1+a_2b_2)}{\sqrt{a_1{}^2+a_1{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}$$



因為 $\cos^2\theta \leqslant 1$，

$$\therefore (a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)$$

學生應能應用此不等式去解有關的簡單問題。

4.4 條件不等式

學生宜溫習實綫上的區間概念。實數的絶對值的定義及性質應予討論。學生應能解綫性不等式、一元二次不等式及一元高次不等式。教師應和學生討論含有絶對值的不等式解法，例如 $|ax^2+bx+c| \geqslant d$，$|x-a|+|x-b| \geqslant c$ 及 $(x-a)|x-b| \geqslant c$。教師亦應對如 $\frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$ 形式的不等式加以討論，其中 P(x) 及 Q(x) 均為多項式。上述不等式的複合不等式亦應給予指導。

A5 正整指數的二項式定理

學生應學習如何求 n! 及 C^n_r 的值。正整指數的二項式定理可用數學歸納法證明。涉及 C^n_r 符號的討論只限於作為二項式定理係數之用。教師可指出帕斯卡三角形及二項式定理係數 C^n_r 的關係。學生並不須要學習一般二項式定理。

學生應能利用正整指數的二項式定理展開有關的數式。教師應指導學生如何求二項展式中某特殊項或某特殊項的係數。學生亦應能求出二項展式中的最大項和最大係數。近似值的應用亦可予以討論。

學生應知道 C^n_r 及 $\binom{n}{r}$ 均可用作二項式定理係數的符號。討論宜包括二項式係數的簡單性質及二項式係數的關係如

$$C^n_0 + C^n_1 + C^n_2 + \cdots + C^n_n = 2^n;$$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

及其他類似關係。

註：排列及組合可以用來引入二項式定理，但有關排列及組合的問題並不需要。學生學習微積分後，教師可引入涉及應用微分和積分的二項式係數問題。

A6 多項式及方程

6.1 單變量的實係數多項式

學生應學習單變量的實係數多項式的一般式和下列各項名稱：
非零多項式的次、首項係數、常數係、首一多項式、零多項式。

學生亦應學習兩多項式的等式、和、差及積。

由定義可知，對非零多項式 f(x)、g(x)

$$\deg\{f(x)\,g(x)\} = \deg f(x)+\deg g(x)$$

和 $\deg\{f(x)+g(x)\} \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$。

應定義兩非零多項式的最高公因式 (G.C.D. 或 H.C.F.)。

學生應清楚除法算式和歐幾里德算法的分別。由除法算式可證明餘式定理，因學生在中學時已學習餘式定理，固教師可給予較深的題目。歐幾里德算法是求兩多項式的最高公因式的一種方法，教師應給予學生練習一些求兩多項式的最高公因式的題目。

6.2 有理函數

應首先定義有理函數。學生可能初次接觸分項分式，教師可引用一簡單例子，如 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$。$\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 稱為分項分式。

教師應清楚說明分解真有理函數為分項分式的法則，並舉例說明。應舉例強調及說明，若一有理函數為假有理函數時，應先將它表為一多項式及真有理函數的和。

學生應學習分項分式的應用。

例：

1. 表 $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$ 為分項分式。
2. 分解 $\frac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$ 為分項分式。
3. 計算 $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ 的值。

6.3 單變量的實係數多項式方程

對於二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 與及它的根 α、β，學生應熟悉下列關係：

$\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$，　$\alpha\beta = \frac{c}{a}$。

對一般 n 次多項式方程，

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad 或 \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0，$$

下列定理給出係數與根的關係：

若 α_1，α_2，…，α_n 為多項式方程 $f(x)=0$ 的根，則一切可能的 k 個根 α_i's　$(k=1，2，\cdots，n)$ 的乘積的和 S_k 等於 $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$，

即是，如 $f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

則 $S_1 = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$S_2 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$S_3 = \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{a_{n-3}}{a_n}$

……………………………

……………………………

$S_n = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ 。

學生應仔細學習下列性質：

(i) 非零多項式的相異根的數目小於或等於多項式的次。

(ii) 若一個整數係數多項式方程的根為有理數 $\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 是互素的整數，則 p 整除多項式的常數項，而 q 整除多項式的首項係數。

(iii) 多重根的條件：

$x=\alpha$ 是多項式方程 $f(x)=0$ 的多重根的充要條件是 $f(\alpha)=0$，且 α 是方程 $f'(x)=0$ 的根，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導數。

以下是較為一般的形式：

對於正整數 k，α 是方程 $f(x)=0$ 的 $k+1$ 重數根當且僅當 $f(\alpha)=0$，並且 α 為 $f'(x)=0$ 的 k 重數根。

和

α 為方程 $f(x)=0$ 的 $k+1$ 重數根當且僅當 α 為下列方程的公根：

$f(x)=0$，

$f'(x)=0$，

⋮

$f^{(k)}(x)=0$

但 α 不是 $f^{(k+1)}(x)=0$ 的根。

註：以共軛偶出現的複數根會在單元 A10 複數中學習。

A7 R^2 及 R^3 的向量

7.1 向量與純量的定義

教師應在此單元開始時對學生解釋向量及純量的分別和介紹表示向量的圖解及寫法。現行的向量記法（如 $\overrightarrow{AB}$、**AB**、$\vec{a}$、**a**）及向量大小的記法（如 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\mathbf{AB}|$、$|\vec{a}|$、$|\mathbf{a}|$）都應教授。下列各項：零向量、單位向量、等向量、負向量、共綫向量及共面向量亦應定義。

7.2 向量的運算 ： 包括三角形定律,平行四邊形定律,多邊形定律
向量代數定律則包括: 加法交換律,加法結合律,純量乘法結合律及分配律

明白純量乘法概念後，學生應不難得出：

若 $\vec{a}=\alpha\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為非零向量而 α 為一些純量，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平行向量。

學生應清楚在 R^2 及 R^3 中將向量分解為分量及以分量和表示另一向量的方法。R^2 中的向量分解可以下列例子介紹。在第一個例子中，向量 $\vec{r}$ 分解為兩個分別在方向 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量 $5\vec{a}$ 及 $4\vec{b}$，由此可推廣至 R^2 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 為不共綫向量和在 R^3 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 為非共面向量和 α、β 及 γ 為純量。

7.3 於直角坐標系中的向量分解

教師應詳細解釋 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分別是在正 x－軸、y－軸及 z－軸的單位向量和在 R^2 及 R^3 中任一向量可用 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 表示。

學生須認識以 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示的向量的性質：

(i) $|a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(ii) 若 $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$，
則向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 與 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 平行。

再者，教師應用圖解釋向量 $\vec{r}$ 的方向比、方向餘弦及方向角。下列性質亦應加以討論。

(i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

(ii) $\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$。

*設 $\overrightarrow{OR}$ (其中 R 為 x,y,z)與三條軸的方向角為α,β,γ,則 cosα,cosβ,cosγ稱為向量 $\overrightarrow{OR}$ 的方向餘弦.e.g: $\cos a=\dfrac{x}{\overline{OR}}$

7.4 向量的線性組合

教師應說明下列定義：

(i) 若 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 為一個向量集，則 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\cdots+\lambda_n\vec{r_n}$，其中 λ_1，λ_2，λ_3，…，λ_n 為純量，稱為 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的向量綫性組合。若各純量 λ 非全為零，則此綫性組合稱為非平凡，否則為平凡綫性組合。

(ii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 存在一等於零的非平凡綫性組合，則它們稱為綫性相關，即 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\cdots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{o}$，其中有部分 $\lambda_i\neq o$，i=1，2，3，…，n。

(iii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的唯一等於零的綫性組合就是平凡綫性組合，則它們稱為綫性無關，即若 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\cdots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{o}$，則 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=o$。

教師應協助學生由 (ii) 得出一個即時結果，就是向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 為綫性相關當且僅當其中一個向量是同組中其他向量的綫性組合。

在 R^2 及 R^3 中綫性相關向量的幾何意義應加以說明。如

(i) 在 R^2 中，向量 $\vec{r_1}$ 及 $\vec{r_2}$ 為綫性相關當且僅當它們是平行向量；

(ii) 在 R^3 中，向量 $\vec{r_1}$、$\vec{r_2}$ 及 $\vec{r_3}$ 為綫性相關當且僅當它們是共面向量。

證明兩個向量線性無關 ：λ**b**+μ**c**=0，如果λ=μ=0，則 **b** 及 **c** 為線性無關

證明三個向量線性無關 ⇒ $(\vec{r_1}\times\vec{r_2})\cdot\vec{r_3}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

其中, $r_x=a_x\mathbf{i}+b_x\mathbf{j}+c_x\mathbf{k}$

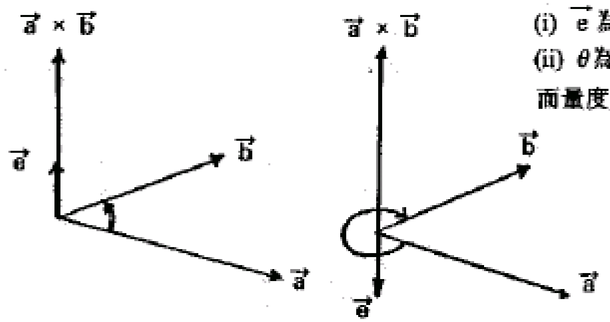
7.5 純量(點)積及向量(叉)積

兩個向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的純量積，寫作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，定義為 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，其中 θ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之間的夾角。下列各性質應加以討論：

1. 純量積的交換律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. 純量積的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
4. 兩非零的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 為正交當且僅當 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
5. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

教師應特別指出由第 5 點用純量積可求出以笛卡兒分量表示兩向量的交角。教師應指導學生求證 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$、$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 等及 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$、$\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$、$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。

向量積的定義須清楚介紹，教師亦應特別說明右手系統的正確方法。兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量積，寫作 $\vec{a}\times\vec{b}$，定義為 $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\vec{e}$，其中



(i) $\vec{e}$ 為垂直於 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的單位向量；

(ii) θ 為由 $\vec{a}$ 量度至 $\vec{b}$ 的角度，
而量度是根據右手法則來決定 $\vec{e}$ 的方向。

下列各性質有討論的必要：

(i) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 及 $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

(iii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

(iv) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

補充資料: 純量三重積 $((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b})$

向量積 $\vec{a}\times\vec{b}$ 與另一向量 $\vec{c}$ 的純量積, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 被稱為純量三重積,是一純量.

其幾何意義: 以它們為鄰邊的平行六面體體積.

三個空間向量共面/線性相關的充要條件: 它們的純量三重積等於零.

四點共面的充要條件 ： $\vec{d}-\vec{a}\bullet(\vec{b}-\vec{d}\times\vec{c}-\vec{a})=0$

學生應自己求證 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{o}$、$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 等用來計算以笛卡兒分量表示兩向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 及 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 的向量積，

$$\vec{r_1}\times\vec{r_2}=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \text{ 或 } =\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

下列兩個性質有助學生掌握向量積的概念：

(i) 兩非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行當且僅當 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$；
這亦是兩非零向量線性相關的條件

(ii) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 可視為由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所組成的平行四邊形的面積。

另更常見的: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$=即$\vec{a}$和$\vec{b}$所組成的三角形面積

7.6 向量在幾何的應用(此 part note 並不齊)

教師應詳細解釋相對向量的用途，包括位置向量和位移向量。P 及 Q 兩點對基準點 O 的位置向量通常分別以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 或 $\vec{p}$、$\vec{q}$ 表示，而 $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ 亦應加以強調。

教師應導出下列結果而其他有關的推論亦值得討論。

分點的位置向量： 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{p}$ 分別為 A、B 及 P 對基準點 O 的位置向量。

若 P 以 m：n 的比分綫段 AB，則 $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ 。

內分點與外分點的處理方法應分別討論。

補充資料: 向量方程

空間直線的向量方程

直線可看成動點 R 與定點 A 所成的向量 $\overrightarrow{AR}$ 保持與已知向量 $\vec{c}$ 平行.
∴當我們知道該*向量的方向及定點*的話,便能得出:

$\overrightarrow{AR}=t\vec{c}\Rightarrow\vec{r}-\vec{a}=t\vec{c}\Rightarrow\vec{r}=\vec{a}+t\vec{c}$(點向式),
其中 $\vec{a}$ 為通過的點, $\vec{c}$ 為向量方向,t 為參數

如果直線*通過兩個已知點 A 及 B*,則直線 AR 的方向可由
它的位置向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 表示,即 $\vec{r}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\Rightarrow\vec{r}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

平面的向量方程

垂直於平面的向量 $\vec{n}$ 稱為該*平面的法向量*,
其中垂直於平面的單位向量 $\overrightarrow{e_n}$ 則稱為*單位法向量*.
如果想求通過*定點 A 及法向量* $\vec{n}$ 的平面方程,在平面上取點 R,
利用 $\overrightarrow{AR}\perp\vec{n}, \overrightarrow{AR}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$(點法式)
另外, $\vec{r}\cdot\overrightarrow{e_n}=\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_n}=d$,其中 d 為 OA 在 $\overrightarrow{e_n}$ 上的投影,
即*原點 O 至平面的有向距離*.
假設 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 及 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$,則考慮 $\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}=D$,
則 Ax+By=Cz=D,這就是點法式的直角坐標形式.

注意! 兩平面的夾角等於它們的法向量之間的夾角.

A8 矩陣

8.1 矩陣及其運算

教師應介紹一個有 m 行和 n 列矩陣的通式，即 m × n 矩陣。學生應清楚矩陣的運算：加法、減法、乘法和純量乘法及其性質。一般來說，對於矩陣 A 和 B，AB ≠ BA，教師應予以解釋。教師應介紹以下各名詞：零矩陣、單位矩陣和倒置矩陣。

8.2 二階及三階方陣

教師應定義方陣和其行列式，並清楚指出奇異矩陣和非奇異矩陣的概念及應用。學生應能計算矩陣的行列式和求出非奇異矩陣的逆矩陣，並知道下列有關逆矩陣和行列式的性質：

A. 逆矩陣的性質

(i) 一矩陣的逆矩陣是唯一的。
(ii) 一矩陣存在逆矩陣當且僅當它是非奇異。
(iii) 若 A 為非奇異，則 AB = 0 蘊涵 B = 0。
(iv) 若 A 為非奇異，則 AB = AC 蘊涵 B = C。
(v) 若 A、B 為非奇異，λ為非零純量及 n 為正整數，
則 AB、A^{-1}、A^t、λA、A^n 為非奇異及
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，
$(A^{-1})^{-1}=A$，
$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$，
$(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$，
$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$。

B. 行列式的性質

(i) 若一行列式中有兩行(或兩列)全等或成比例，則此行列式的值是零。

(ii) 若一行列式中有兩行(或兩列)互換，則此行列式的數值不變但符號改變。

(iii) 若一行列式的行換作列(或列換作行)，則其值不變，即是 $\det A^t = \det A$ 或 $|A^t| = |A|$。

(iv) 若將一行列式中任何一行(或列)的每一分子乘以同一數，則其值亦乘以此一數。

(v) 兩同階方陣乘積的行列式等於該兩方陣行列式的乘積，即是 $\det AB = \det A \cdot \det B$ 或 $|AB| = |A||B|$。

P.S：$\det|BA| = \det|B||A| = \det|AB|$

8.3 於二維幾何的應用

學生應熟悉以矩陣表示一點和一向量；及反射、旋轉、放大、位移、平移及其合成的矩陣表示法。下列各例為部分以 2×2 矩陣表示的變換：

(i) 對直綫 $y = (\tan\theta)x$ 的反射，以矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 表示。

(ii) 繞原點旋轉 $\varnothing$ 角，以矩陣 $B = \begin{pmatrix} \cos\varnothing & -\sin\varnothing \\ \sin\varnothing & \cos\varnothing \end{pmatrix}$ 表示。

(iii) 對原點以比例因子 $k \neq o$ 放大，以矩陣 $C = \begin{pmatrix} k & o \\ o & k \end{pmatrix}$ 表示。

(iv) 以因數 k 平行於 x－軸位移，以矩陣 $D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ o & 1 \end{pmatrix}$ 表示。

對於 (iii) 及 (iv)，應討論對形狀和面積的影響。教師應對學生解釋清楚在上述各種變換下，所有滿足 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，其中 T 代表一種變換，的每一點 $P(x, y)$ 都會轉到一新點 $P'(x', y')$。熟習各變換的合成對學生明白矩陣乘積很重要。

例：

先對直綫 $y = (\tan\theta)x$ 反射跟著繞原點旋轉 $\varnothing$ 角的結果，正如上文所提及，可以乘積 BA 表示，其中 $BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$。留意此乘積是由右至左解釋為：先應用變換 A 再應用變換 B。

如下的合成變換亦可提出：

例：

以方程組 $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = -x + 4 \end{cases}$，其矩陣表示法為

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{的變換。}$$

矩陣 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 代表變換是對原點順時針方向旋轉 90°。因此，它可視為一旋轉再跟著平移。若以 (3，1) 為定點，此變換可視作為對 (3，1) 順時針方向旋轉 90°。

A9 二元及三元線性方程組

9.1 高斯消去法及梯陣法

適合下列兩個性質的矩陣稱為梯陣式：

(1) 首 k 行非零；其餘各行為零。

(2) 每一非零行的第一個非零元素為 1，並出現在前一行第一個非零元素的右列。

例：以下 5×8 矩陣是梯陣式；
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

學生應懂得利用高斯消去法解二元及三元的綫性方程組，方法就是利用行的基本運算將一矩陣變為梯陣式。

例：解方程組 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

增廣矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

原方程組與下列方程組等價 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

由此可得 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$x_3 = 1$。

9.2 解的存在性及唯一性

學生應知道二元或三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。

對於二元綫性方程組：$\begin{matrix} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{matrix}$

(i) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$，方程組有唯一解。

幾何上，方程組代表一對相交的直綫。

(ii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$，

方程組無解。幾何上，方程組代表一對平行(而不重合)的直綫。

(iii) 若 $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ 及 $\det\begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$，

方程組有無窮多解。幾何上，方程組代表一對重合的直綫。

教師應與學生討論一些如下列的三元方程組例子。當學生掌握了三維坐標幾何的意義後，其幾何解釋可加以討論。

(i) 在解方程組 $\begin{cases} 2x+y-z=7 \\ 5x-4y+7z=1 \\ 7x-3y+6z=8 \end{cases}$ 時，

明顯地第三式是多餘的。教師可與學生討論求得解

$x=\frac{29-3\lambda}{13}$，$y=\frac{33+19\lambda}{13}$，$z=\lambda$ 的方法，其中 λ 是任意數。

(ii) 解不一致方程組如 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+2z=1 \\ 3x-2y+3z=7 \end{cases}$。

循此路向，可以更抽象形式表示三元綫性方程組的解的存在性及唯一性條件。

A10 複數

10.1 複數的定義及其算術運算

教師應簡單介紹符號 i。數 $z=x+yi$，其中 x、y 為實數，稱為複數，而 x、y 分別稱為複數的實部 (Re z) 和虛部 (Im z)。當 $x=0$，$y\neq 0$，$z=yi$ 稱為純虛數；當 $y=0$，$z=x$ 則為實數。

教師可問學生應如何定義複數等式，但須指出複數並無次序性質。

兩個複數的和、差、積及商亦應給予定義。

10.2 阿根圖,幅角和共軛

學生應知道以下各項的定義：複數 z 的模 $|z|$、幅角 arg z、幅角的主值和它的共軛複數 $\bar{z}$。

複數 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的模幅形式亦可寫為 $z=r\,\mathrm{cis}\,\theta$。

學生應理解下列複數的性質：

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 為整數。

(iii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(iv) $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$，其中 k 為整數且 $z_2 \neq 0$。

教師應教授下列共軛複數的性質：

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\bar{z} = 0$ iff $z = 0$
3. 一個複數是自共軛當且僅當其為實數。
4. $z\cdot\bar{z} = |z|^2$
5. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
6. $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$
7. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$，$z_2 \neq 0$

利用此等性質，學生不難證明：

如 α 是實係數多項式方程的根，則 $\bar{\alpha}$ 亦為其根；即是若實係數多項式方程的根不是實數，則必以共軛偶(對)形式出現。

學生應知道下列不等式：

(i) $|\mathrm{Re}\,z| \leqslant |z|$

(ii) $|\mathrm{Im}\,z| \leqslant |z|$

(iii) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$（三角不等式）

學生亦可用類似方法證明：

$|z_1-z_2| \geqslant |z_1|-|z_2|$

和 $|z_1-z_2| \geqslant |z_2|-|z_1|$。

三角不等式可用數學歸納法推廣至：

$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$。

學生須學習複數在阿根圖的幾何表達法，並應知道實軸和虛軸。教師亦應教授複數的極形式的表達法及其幾何意義。可介紹 $\mathrm{cis}\,\theta$ 的另一記法 $e^{i\theta}$ 給學生，因此 $z=re^{i\theta}$；此記法稱為複數的指數形式或歐拉形式。

10.3 於平面幾何的簡易應用

學生應知道三角不等式的幾何意義，並須學習複數在平面幾何的多種用途，以下為兩例：

1. 在阿根圖上，XYZ 為等邊三角形，而其外心在原點上；若 X 代表複數 $1+i$，求 Y 和 Z 所代表的複數。
2. 若 z_1、z_2 和 z_3 為代表一等邊三角形頂點的三個相異複數，則 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$。

學生應學習在阿根圖上移動點的軌跡的例子，以下為兩個簡單例子：

1. 求出點 z 的軌跡，使得 $|z-a|=k$，其中 a 是一複數和 k 為一正常數。
2. 求出點 z 的軌跡，使得 $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k$，其中 a、b 為複數，k 為不同值的正常數。

10.4 棣美弗定理

10.4a 有理數指數的棣美弗定理

學生應學習證明當 n 是正整數時，下列定理成立：

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

此處假定 $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$。

當 n 是負整數時，可設 $n = -m$，m 為一正整數，學生亦應能證明定理在 n 為負整數時也成立。但當 $n = \frac{p}{q}$，其中 p、q 為整數，$q \neq 0$，證明須待學生完成複數 n 次根的學習方可進行。

10.4b 於三角恒等式的應用

由棣美弗定理

$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$，其中 n 為一正整數，可將 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 寫成 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 的乘方。

設 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，則可利用

$$\begin{cases} z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta \\ z - \dfrac{1}{z} = 2i\sin\theta \end{cases} \text{和} \begin{cases} z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \\ z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta \end{cases}$$

將 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的乘方表為倍角的正弦和餘弦。例如，學生應能將

$\cos^4\theta\sin^3\theta$ 表為倍角的正弦的和

及 $\cos^3\theta\sin^4\theta$ 表為倍角的餘弦的和。

10.5 複數的 n 次根及其幾何解釋

學生應學習複數 n 次根的定義；並須詳細學習 1 的 n 次根(即 n 次單位根)。以下數例可供課堂討論：

1. 求 -1 的五次根。
2. 解方程 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$。
3. 求 $1+i$ 的立方根。
4. 因式分解 $z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1$ 為實二次因式。

<The End> Since 2002/1/1 初稿: 2002/1/31

PDF Edition 2002/5/12

香港學生母語學習網 http://mothert.hk.st

Email : lwrncchg@yahoo.com