A-Level Pure Math Note Part B (Calculus with Analytical Geometry)

B1 序列,級數及其極限課程綱要(經簡化及重點處理)

1.1 序列及級數

序列和級數的概念應該清楚地提出。下列的介紹方法可供參考：

若 a_n 為對應正整數 n 可定義的函數，其數值 a_1，a_2，$a_3 \cdots a_n$，… 則可組合成一序列。至於該序列為有限或無限則須視乎項數是有限或無限。再若，$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 則稱為級數。至於該級數為有限或無限必須視乎其所包括的數目而定。下列為常用記法：

$S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ 或 $\sum_{1}^{n} a_r$ *(即：如果n是固定的正整數,則級數是有限的；若n=無限大,則級數會是無限的.)*

有關序列和級數的簡易運算及法則應予介紹。為方便起見，序列 a_1，a_2，$a_3\cdots$ 和 b_1，b_2，$b_3\cdots$ 可用 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 表示，則

(i) $\{a_i\} \pm \{b_i\} = \{a_i \pm b_i\}$

(ii) $\lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}$

亦即，可涉及項與項之間的運算概念。

對級數求和法，可參考下列方法：

(1) 數學歸納法：本課程中單元 A3 已有提及。

(2) 求差方法：教師應強調級數中第 r 項可寫為 f(r+1)及 f(r) 之差，其中 f(x) 為 x 的函數。即若 $a_r = f(r+1) - f(r)$

則 $\sum_{1}^{n} a_r = \sum_{1}^{n}\left[f(r+1) - f(r) \right]$

$= f(n+1) - f(1)$

$\sum_{1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ 及 $\sum_{1}^{n} r(r+1)$ 就是其中一些典型例子。

補充資料:常見的序列,級數

以 a 為首項, d 為公差, ℓ為尾項

A.P.(算術/等差級數) $T_n=a+(n-1)d$

$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}(a+\ell)$

如果 A.P. = 1,2,3,4,…,n

則 H.P.(調和級數)$=\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n}$

G.P.(幾何/等比級數) $T_n=ar^{n-1}$

$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r^n}=\frac{a}{1-r}$

若級數的項是可以用下列遞推關係表達的話：

$a_r - a_{r-1} = f(r)$ 或

$a_r = Aa_{r-1} + Ba_{r-2}$

以下是找出 a_r 的解的方法：(特別適用於後者)

設 α、β 為輔助方程 $\lambda^2 = A\lambda + B$ 的根，

(i) 若 $\alpha \neq \beta$，則 $a_r = k_1\alpha^r + k_2\beta^r$

(ii) 若 $\alpha = \beta$，則 $a_r = (k_1 + rk_2)\alpha^r$

其中 k_1 和 k_2 為待定常數。

1.2 序列及級數的極限

序列的極限概念應以直觀方式教授，下列方式可作參考：

設 a_1，a_2，…，a_n，… 為一序列，對一任意大的數值 n，則 a_n 與一常數 ℓ 的差為一任意小的正數，我們亦可以寫為 $\boxed{\text{當 } n\to\infty \text{ 時 } a_n \to \ell \text{，或} \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \text{。}}$

教師應同時強調下列各點：

(i) ℓ 稱為該序列的極限。

(ii) 若極限 ℓ 是存在的話，則必是$\boxed{\text{唯一的極限}}$。

(iii) 該序列在 ℓ 收斂，或該收斂序列的極限為 ℓ。

(iv) 若一$\boxed{\text{序列並不收斂於任何極限，則稱為發散序列}}$。

並應提供充足的收斂和發散序列的例子以作說明。此等例子如下：

(1) $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，其中 $a>0$	(3) 發散序列 $a_n = \{1+(-1)^n\}\sqrt{n}$
(2) 序列 $a_n = \frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{n}$ 收斂於極限 0	(4) 振動發散序列 $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$

注意：序列可分為收斂，發散(至 $+\infty$ 或 $-\infty$)或振動(並不收斂或發散至 $+\infty$ 或 $-\infty$)不同類別。

收斂序列的一般性質亦應與學生討論：

設 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 和 b_1，b_2，b_3，…，b_n，… 為收斂序列，其極限分別為 a 和 b，則下列序列亦具收斂性質。

(i) λa_1，λa_2，λa_3，… 收斂於 λa，其中 λ 為一常數。

(ii) a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，… 收斂於 $a+b$。

(iii) a_1b_1，a_2b_2，a_3b_3，… 收斂於 ab。

(iv) $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}$，… 收斂於 $\frac{a}{b}$，假若 $b \neq 0$。

最後學生應在老師指導下認識到下列因果關係：

(i) 設收斂序列 a_1，a_2，a_3，… 的極限為 a，則 $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$，其中 k 為一正整數。*(即極限是唯一的)*

(ii) 設 a_1，a_2，a_3，… 和 b_1，b_2，b_3，… 為兩收斂序列，其極限同為 ℓ；而若另一序列 c_1，c_2，c_3，…，其中當 $i>k$，k 為一正整數，$a_i \leq c_i \leq b_i$，則 c_1，c_2，c_3，… 亦為收斂，而且其極限亦是 ℓ。該性質通常稱為$\boxed{\text{迫近定理}}$，教師可薄單調序列和有界序列加以介紹，以便擴闊學生對序列的認識。

(或對所有正整數 n, $a_n \leq b_n \leq c_n$,且如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$,則 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$)

至於無窮級數方面，教師可用類似如下的處理方法：

(1) 收斂概念

若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} u_i = S$ 存在，則級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 為收斂，並且可稱 S 為級數的總和。若用 S_n 表示 $u_1+u_2+\cdots+u_n$，則其結果可寫成為：

當 $n\to\infty$ 時，$S_n\to S$ 或 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ 通常稱為第 n 個的部份和)在類似情況下，教師可選擇引入發散和振動的概念。

(2) 收斂級數的性質

若 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 的極限為 S 和 $v_1+v_2+v_3+\cdots$ 的極限為 S′ 則

(a) $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3+\cdots$ 收斂於 λS，λ 為一常數；

(b) $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)\cdots$ 收斂於 $S+S'$；

(c) 若 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

1.3 序列及級數的收斂性

收斂序列的特性：• 收斂序列是有界的 ，單調而有界的序例爲收斂.

應討論一些典型的收斂和發散序列,並以下的實例說明計算序列極限的方法.

(A) 收斂序列

(i) $a_n = x^n$，設 $|x|<1$

(ii) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(iii) $a_n = \frac{x^n}{n!}$

(B) 收斂級數

(i) $r+r^2+r^3+\cdots$，設 $|r|<1$

(ii) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$

(iii) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

(iv) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

(C) 發散級數

(i) $\Sigma\frac{1}{n}$

(ii) $\Sigma(1-\frac{1}{n})^n$

(iii) $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}$

此方法應包括迫近定理的典型應用例題,但無須對收斂性的測試再作探究.

Part 2 : 綱要以外提提你 …

a) *一些重要的序列極限*: • $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$； , $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$, 其中 $a>0$ ；

f $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q|<1$, 當 $|q|>1$, $\lim_{n\to\infty} q^n=\infty$

注意! $\lim_{n\to\infty} q^n=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n=\infty$, 但反向則不可以

„ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{a^n}=0$ *α為常數,a>1,同類的另一例子: $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

b) *要注意的基本事項*:

• 只有$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{x_n+y_n\}$均收斂, $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n)+\lim_{n\to\infty}(y_n)$；

同樣,對於無窮項極限運算 如 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n})$,

極限運算法則並不成立.

, 另一方面, $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在極限,並不等於 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 及 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在極限.

e.g. $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$

f 即使 $\lim_{n\to\infty}|a_n|$ 存在,亦不等於$\{a_n\}$必是收歛的.

如序列 $x_n=(-1)^n$, $\lim_{n\to\infty}|x_n|=1$, 但序列$\{x_n\}$本身沒有極限.

c) *運算上的技巧*

• $\lim_{n\to\infty} a_n=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{\ 2}=0$

$\therefore$ 想去証 $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-A)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n-A|=0$

只要利用三文治(迫近)定理, 証到 $0\le|a_n-A|\le\ldots\to 0$, 則 $\lim_{n\to\infty}|a_n-A|\to 0$

, 要計算極限的值,首先要證明極限存在,例如$\{a_n\}$是單調遞增,並有上界的.

再假設 $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow e.g \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}\Rightarrow \mathbf{l}=\frac{\mathbf{l}}{1+\mathbf{l}}\Rightarrow\ldots\Rightarrow \mathbf{l}=$ ____

f 計算序列時,宜先計 $a_n>0,\forall_n$(確保它是一正數,能方便不等式運算)

B2 極限,連續性及可微性課程綱要(經簡化處理)

2.1 函數的極限

函數的極限應以直觀方式介紹。其實，在 $x=a$ 時，函數 $y=f(x)$ 的極限概念應與序列的極限概念連繫起來。當自變量經過一收斂序列 $\{x_n\}$（橫坐標序列），其極限為 a 時，則可考慮其直坐標序列 $\{f(x_n)\}$。故此當 $\{x_n\}$ 趨近 a 時，則 $\{f(x_n)\}$ 趨近一有限值 ℓ 之情況，應可清楚而明確地表達，即是

若 $x\to a$ 則 $f(x)\to \ell$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

部份教師可能會將重點放在當 x 與 a 為相當接近時，則 f(x) 與 ℓ 之間的差異可以任意的小的概念上，從而強化當 $x\to a$ 時，$f(x)\to \ell$ 的理解。

但必須向學生指出，函數值 f(a) 的存在，並不能引申為極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的存在及等於 f(a)，縱使在一般情況下可成立。教師可參考下列例子：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 當\ x\neq 0\\ 0 & 當\ x=0\end{cases}$$

這裏 $f(0)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

自變量趨極限 a 的途徑應加以注意：當 x 的值是由左至右增加時，函數的極限稱為左方極限，以 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 表示；當 x 的值是由右至左遞減時，極限稱為右方極限，以 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 表示。

由此，教師不難引導學生理解當 $x\to a$ 時，函數 f(x) 的極限存在當且僅當其左方極限和右方極限相等。至於對極限作更廣泛理解，教師應討論 $x\to\infty$ 的情況，使學生再一次明白當 x 趨於一足夠大的數時，f(x) 與 ℓ 的差異可任意的小，並表為 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$。

下列函數的極限性質應包括在討論範圍內：

(i) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to a} [kf(x)]=k\lim\limits_{x\to a} f(x)$，k 與 x 無關

(iii) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

(v) 若 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ 在 x 接近 a 時成立，而且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell$，則 $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\ell$。

一些重要的極限，如下列者，應予以介紹：		
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+x)}{x}=1$
(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$	(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ell n\,a$；$a>0$	(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ell n\,x}{x-1}=1$
(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x=e^a$		

2.2 函數的連續性

函數的連續性的定義是應以函數的極限作為基礎，以及用直觀的方法加以解釋，不宜涉及 ε-δ 的概念。教師可參考下列建議：

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在兼且等於 f(a)，則函數 f(x) 在 $x=a$ 連續。

若函數在某區間內的每一點連續，則函數在該區間內連續。

在引入函數於一點的不連續性前，應討論一些常見的函數，例如：

(i) $f(x)=x^2$ 在任何區間內皆連續。

(ii) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 並非在整個區間 $0\leqslant x\leqslant 5$ 內連續。

上述概念並不需要作嚴謹的處理，但教師宜提供廣泛而合適的例子，以便加強學生在這方面的認識，並理解若兩函數在 $x=a$ 連續，則它們的和、差及乘積在該點亦為連續，而當分母不等於零時，它們的商亦為連續。教師應引用一些在整段實數綫上皆為連續的例子，以啟發學生進一步的認識：

(i) 多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

(ii) 指數函數 $f(x)=a^x$；$a>0$

(iii) 對數函數 $f(x)=\log_a x$；$a>0$，$a\neq 1$

(iv) 三角函數，例如 sinx、cosx

對於合成函數的連續性，教師可採納下列方式：

設 $y=f[g(x)]$ 為一合成函數，其內函數 g(x) 在 $x=a$ 連續，其外函數 $y=f(t)$ 在 $t=g(a)$ 亦為連續，則合成函數 $y=f[g(x)]$ 在 $x=a$ 連續。

教師可強調每一連續函數的連續函數亦為連續。

教師應指出在一區間內的連續函數擁有一系列值得注意的性質，並加以討論，但不宜作嚴謹的證明。這些性質包括：

(i) 若函數 f(x) 在閉區間 [a，b] 內連續，其中 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$，$A\neq B$，則 f(x) 在 A 與 B 之間的每一數值取值一次或以上。（介值定理）

(ii) 閉區間上的連續函數必為有界。

(iii) 閉區間上的連續函數必有其極大和極小值。

（性質 (ii) 和 (iii) 稱為魏爾斯脫拉斯定理）

2.3 函數的可微性

代 $x=x_0+h$

函數 f(x) 在 x＝a 的可微性定義如下：

函數 f(x) 在 x＝a 上可微當且僅當極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。

教師應同時指出若一函數在某點可微，則函數在該點連續，而連續性祇是可微性的必要條件而並非充份條件。並且，函數在 x＝a 的導數定義就是上述極限的值。學生可透過上述學習理解可微性的概念。函數 f(x) 在 x＝a 的導數可表為

$f'(a)$、$\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

教師應提及若函數在一區間內每一點皆可微，則該函數在該區間內可微，兼且在區間內的每一 x 值，皆對應於函數在該點的導數 $f'(x)$，因此 $f'(x)$ 亦為 x 的函數，稱為 f(x) 的導函數。

在這階段，教師應預備充足例題以便學生能掌握微分法的概念和技巧，至於從基本原理求取一些典型函數的導數，尤為重要。故此，足夠的練習是不可缺少的。下列例子可作參考：

(1) 利用第一求導法則，找出下列函數於各點的導數：
 (i) x^2 於 $x=1$
 (ii) e^x 於 $x=0$
 (iii) $\sin x$ 於 $x=\frac{\pi}{4}$

(2) 利用第一求導法則，求下列函數的導數：
 (i) $f(x)=x^n$ 其中 n 為一正整數
 (ii) $f(x)=e^x$

Part 4 綱要外尚需注意事項

B3 微分法課程綱要(經簡化處理)

3.1 微分法的基本法則

作為延續，教師應講解以下法則：

(1) $\frac{d}{dx}(k)=0$，其中 k 為常數

(2) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$，r 為實數

(3) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$

(4) $\frac{d}{dx}[kf(x)]=k\frac{d}{dx}f(x)$，其中 k 為常數

(5) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ (積法則)

(6) $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$，$g(x)\neq 0$ (商法則)

教師可提供以上法則的証明，藉以加強學生在概念上及技巧上的掌握。從 (3) 至 (6)，要強調 f(x) 及 g(x) 的導數的存在。關於 (2)，對 r 為整數的証明已足夠，對 r 為實數的証明可留待至學生已學習鏈式法則及對數微分法。教師應列舉一些常見的函數以示範使用以上法則求導數。

3.2 三角函數的積分法

教師應講解以下函數的微分法：

1. sinx
2. cosx
3. tanx
4. cosecx
5. secx
6. cotx

教師可鼓勵學生作出以上的証明，
並提示學生 (4) 至 (6) 的証明可使用商法則。

3.3 複合函數及逆函數的微分法

複合函數 $y=f[g(x)]$ 的導數可透過鏈式法則
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ 或 $=f'(t)g'(x)$，其中 $t=g(x)$，求得。
$y=f(x)$ 的逆函數 $x=f^{-1}(y)$ 的導數，
可利用 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 求得。

教師可用以下例子作示範：
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$、$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$、$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ 及
$\frac{d}{dx}(x^{-n})$、$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})$，其中 n 為正整數。

3.4 隱函數的微分法

隱函數 $F(x, y)=0$ 的微分法，可利用上述各法則，對於自變數 x，求方程各項的導數。教師應給予示例，加強與學生的討論，下列是一些建議：

(i) 若 $x\cos y^3 + y\sin 2x = 1$，求 $\frac{dy}{dx}$。

(ii) 已知 $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$，求在點 (2，5) 的導數 $\frac{dy}{dx}$。

(iii) 對 $\cos(x^2 - y^2) = xy$，求 $\frac{dy}{dx}$。

3.5 參數方程的微分法

對於用參數方程 $x=u(t)$，$y=v(t)$ 表達的函數 $y=f(x)$，y 可被表為對 t 的複合函數 $y=f(u(t))$。透過鏈式法則，可得出 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$，故此 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 或 $f'(x)=\frac{v'(t)}{u'(t)}$。學生需明白在求導時，$u(t)$ 及 $v(t)$ 必須為可微的及 $u'(t)\neq 0$。

教師可示範以下求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子：

(i) 橢圓 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$

(ii) 旋輪綫 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$

3.6 對數函數及指數函數的微分法

教學範圍包括以下法則，教師可使用建議的方法提供證明：

1. $\frac{d}{dx}(\ell n\, x)=\frac{1}{x}$（用 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$）

2. $\frac{d}{dx}e^x=e^x$（用 $\frac{d}{dy}\ell n\, y=\frac{1}{y}$ 及鏈式法則，其中 $y=e^x$ 或應用逆函數的求導法則）

3. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\,\ell n\, a}$

4. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\,\ell n\, a$

教師應提供如下列的例子：e^{x^3} 及 $\log_a\sqrt{x^2+1}$。

（注意：為求完整起見，教師可與學生討論，對 n 為有理數及實數，公式 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ 的證明。）

教師應強調一些應用對數微分法的例子，例如：

當 y 為 x 的複雜的函數，尤其當 y 涉及變數指數，導數 $\frac{dy}{dx}$ 可從對數微分法求得。下列是一些常見的例子：

$y=x^x$ 及 $y=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x+d)}$。

3.7 高階導數和萊布尼茲定理

教師應引入高階導數的定義及符號 $f''(x)$、$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^ny}{dx^n}$ 的意義。此外，學生亦應能求以參數方程表達的函數的高階導數和應用萊布尼茲定理 $\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\sum_{r=0}^{n}C_r^n\,u^{(r)}v^{(n-r)}$。學生可嘗試以數學歸納法證明此定理。教師應示範以萊布尼茲定理求涉及函數的高階導數的方程，尤其涉及隱函數，下列是一些例子：

1. 求 $\cos^2 x\sin x$ 和 $x^3\cos x$ 的 n 階導數。

2. 設 $f(x)=\tan^{-1}x$。證明 $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=0$ 及求對 $x=0$，$f(x)$ 的 n 階導數。

3. 已知 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$。

   證明 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{若 n 為偶數}\\ -n! & \text{若 n 為奇數}\end{cases}$，

   其中 n 為整數及 $n\geqslant 3$。

3.8 洛爾定理和中值定理

教師應講解洛爾定理和中值定理的直觀概念及其幾何意義。對於能力較高的學生，則可提供定理的證明。學生應學習簡單及直接應用定理的題目。可考慮下列問題：

1. 若對所有在某區間內的 x 值，$f'(x)=0$，則 $f(x)$ 在該區間內為一常數。

2. 若對所有在某區間內的 x 值，$f'(x)=g'(x)$，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在該區間內的差為一常數。

3. 證明若 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$，則方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 0 與 1 之間有至少一個根。

B4 微分法的應用 課程綱要(經簡化處理)

4.1 洛必達法則

引入以下待定型的極限：

$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，

0^0，∞^0，1^∞。

首先宜展示上述形式出現的例子。教師應講解洛必達法則 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 以處理 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型的極限。以下例題可作考慮：

1. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos^2\pi x}{e^{2x}-2ex}$
2. $\lim_{x\to a^+}\frac{\ln\sin(x-a)}{\ln\tan(x-a)}$

教師應強調必須先簡化 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 然後才計算極限，而此過程可不斷重覆直至 $\lim_{x\to a}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ 已定型。至於其他待定型的極限，可引入例題以展示該等極限可轉化為待定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的樣子，使可應用洛必達法則。以下例題可作考慮：

1. $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}-\cot x)$
2. $\lim_{x\to0^+}x^x$
3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

而洛必達法則的證明則不包括在內。

4.2 變率 (略…此節不在考試範圍內)

4.3 單調函數

作為開始，教師可引述以下直觀且顯而易見的結果：

若 $f'(a)>0$，則對所有小過但充份接近 a 的 x 值 $f(x)<f(a)$，及對所有大過但充份接近 a 的 x 值 $f(x)>f(a)$。

從幾何的角度看，以上結果可引伸至此語句：當 $x=a$ 時 $f(x)$ 是嚴格地遞增。(注意：討論中的函數是連續和可導的。)相似的描述亦可用於當 $x=a$ 時，$f(x)$ 是嚴格地遞減的。由此，單調遞增的概念可被表達如下：

若對所有在該區間的 x 值 $f'(x)>0$，則 $f(x)$ 在該區間內為一單調遞增的函數。

教師應引導學生得出以下重要結果：

若在區間 (a，b) 內，$f'(x)>0$、函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續及 $f(a)\geq0$，則 $f(x)$ 在該區間內便為正數。

單調遞減函數的處理亦可用相同方法處理，學生可提供類似的描述。

以上結果在證明一些如下的不等式時有着重要的相關性：

(i) $(1+x)^\alpha\leq1+\alpha x$，對 $0<\alpha<1$ 及 $x\geq-1$
(ii) $(1+x)^\alpha\geq1+\alpha x$，對 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 及 $x\geq-1$
(iii) $\sin x>x-\frac{x^3}{3!}$，對 $x>0$

4.4 極大和極小

藉着引入曲線的斜度的定義，教師應解釋及強調導數作為曲線的斜度的幾何含意。關於此點，教師可一再加強學生對曲線的遞增或遞減的圖像理解。

當學生已熟習以上知識後，教師可引導學生掌握辨認局部極大點及局部極小點(即曲線的轉向點)的能力。學生要學習以下關於判斷局部極值的情況：

對函數 $f(x)$，
(a) 求 a 致使 $f'(a)=0$ 及
(b) 檢查 $f''(a)$ 的符號或檢查在 a 的鄰域中 $f'(x)$ 的符號改變。

教師應提醒學生以下事項：
(i) 局部或相對極值未必為全局或絕對極值；
(ii) 轉向點可於導數不存在的地方出現，如 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 及 $y=|x|$；
(iii) 平穩點的導數為零；
(iv) $f'(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出局部極值，如 $x^3\sin\frac{1}{x}$ 及 x^3。

教師應討論及示範與以上技巧有關的例題。接着可討論拐點，常用的方法如下：

(a) 求 a 致使 $f''(a)=0$

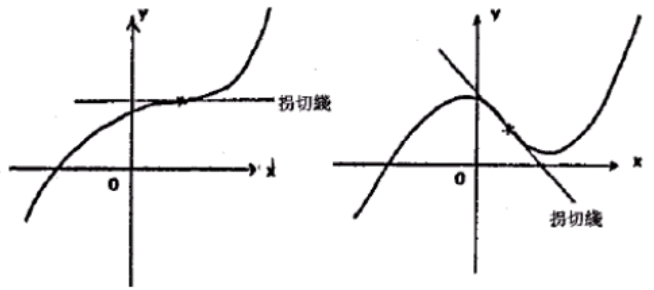
(b) 檢查在 a 的鄰域中 $f''(x)$ 的符號改變。

教師應提醒學生以下事項：

(i) 於拐點，其導數未必相等於零；

(ii) $f''(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出拐點，如 x^4。

因此，一些能展示不同方向的拐切綫的圖像會有很大的幫助。



*注意!*若 f(a)不存在,
即使 $f''(a)=0$
該點也不是拐點.

最後,對於當函數的定義域擴大或縮小時與其絕對值的關係,教師可加以簡單解釋.

4.5 曲線描繪

本課題開始前，學生先要學習求出曲綫上存在着的垂直、水平及斜漸近綫。講解時，教師宜運用例題以作解釋。例如：曲綫 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$。

學生應明白到垂直漸近綫可於不連續點出現，然後再學習當 x 趨向無限大時函數的表現，例如 $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}\longrightarrow x$ 當 x 為充份地大，所以可理解到 $y=x$ 為一漸近綫。

補充資料-漸近線:(不包括在課程綱要)

定義:當曲線上的點沿曲線趨於無窮時,此點與一直線(漸近線)的距離將趨於零

P.S： 曲線可穿過自身的漸近線

運算: 1)*水平漸近線及斜漸近線*: 設 mx+c 為曲線 y=f(x)的漸近線,

當且僅當 $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+c)]=0$,此時 m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$,c= $\lim_{x\to\infty}=[f(x)-mx]$

2)對於*鉛垂漸近線*,f(a)不存在(如代 a 入 f(x)時分母為零)

P.S: 考慮 $F(x)=mx+c+\frac{R(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to\infty}[F(x)-(mx+c)]=\lim_{x\to\infty}\frac{R(x)}{g(x)}=0$

在完成本課題時，教師應幫助學生尋找、選取及組織所有有關的資料，以便能有系統地描繪曲綫。以下事項值得注意：

(1) 對稱於兩軸：檢查方程以探查對稱性

(a) 如無 y 的奇數冪出現，曲綫則對稱於 x 軸；

(b) 如無 x 的奇數冪出現，曲綫則對稱於 y 軸；

例如：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是對稱於兩軸。

補充:奇函數 f(x)=-f(x)
對稱於原點;
偶函數 f(-x)=f(x)
對稱於 y 軸.

(2) x 及 y 的值域的限制

例如：(a) 對 $y^2=4x$，x 必為非負數，而 y 則可取所有值。

(b) 對 $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$，可寫成 $y^2=\frac{a^2x^2}{x^2+a^2}$，所以 x 可取所有值；但當寫成 $x^2=\frac{a^2y^2}{a^2-y^2}$，明顯地 $|y|<a$。事實上，此曲綫是包含在漸近綫 $y=\pm a$ 內。

(3) 與兩軸的截距或任何在曲綫上容易見到的點。

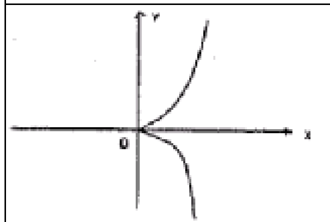
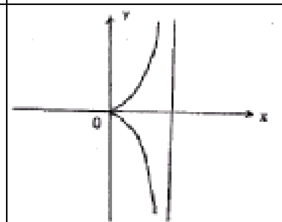
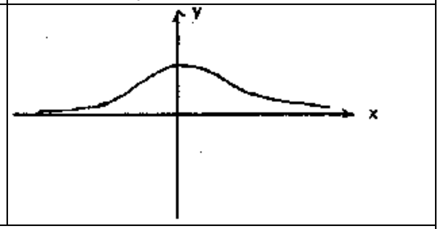
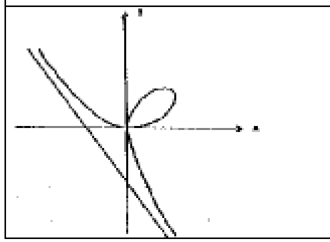
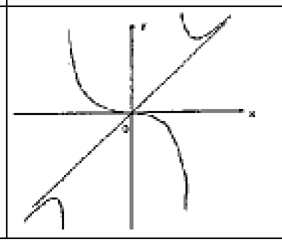
例如：對 $y=\frac{x(x+2)}{x-2}$，曲綫的 x 截距為 -2 及 0，而曲綫僅與 y 軸相交於原點。

(4) 極大、極小及拐點。

(5) 曲綫的漸近綫。

為了全面的學習這課題，教師在例題中要多提點學生須注意的地方。對於三角函數，學生要注意曲綫的週期。至於用參數方程表達的曲綫則沒有特定要注意的法則，較好的方法就是儘量求得相對的笛卡兒方程然後描繪。

教師應描繪一些能示範以上步驟常見的例子給學生參考。以下例子可作考慮：

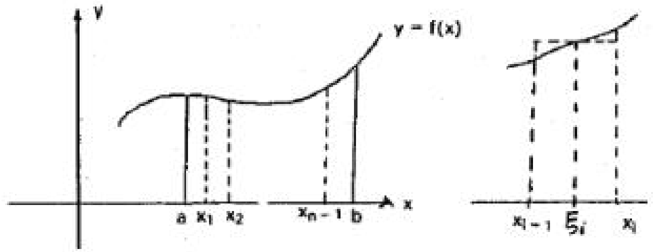
1. $y^2=ax^3$	2. $y^2(a-x)=x^3$	3. $y=\frac{1}{x^2+a^2}$
		
4. $x^3-3axy+y^3=0$	5. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$	
		

B5 積分法 課程綱要(經簡化處理)

5.1 黎曼積分定義

有關定積分的理論可由兩相異的途徑表達：其一為透過幾何直觀的進路，此外亦可採用純分析的進路，前者需倚賴幾何的面積概念，而後者則引用定積分作為一代數和的極限的概念而無需引用幾何概念。教師宜按學生所需決定其取向及施教次序。以下乃一簡化的說法以供參考：

在區間 $[a, b]$ 內，設 $f(x) \geqslant 0$ 及其圖像為有限和連續。



用點 x_0，x_1，x_2，…，x_n 將 $[a, b]$ 分成 n 個子區間其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，同時設 $x_i - x_{i-1}$ 記為 Δx_i 及 ξ_i 為在 $[x_{i-1}, x_i]$ 內任一點。由曲綫 $y = f(x)$、直綫 $x = a$ 及 $x = b$ 和 x－軸所包圍的區域的面積約為總和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。此外，當 n 增加而 $\max(\Delta x_i) \to 0$，可求此面積的值而此總和的極限則定義為 $f(x)$ 由 $x = a$ 到 $x = b$ 的定積分並記為

$$\int_a^b f(x)dx，即 \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中記號

$f(x)$ 稱為被積函數；

a 稱為下限；

b 稱為上限而此總和則稱為黎曼和。

參考公式:

A.P. $\dfrac{n(a+\ell)}{2}$ 或 $\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

G.P. $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 或 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

教師和學生討論時，應強調下列各點：

(1) $[a, b]$ 是任意分割成子區間的；

(2) $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 是任意的；

(3) 將定積分定義為總和的極限已先假設 $a < b$。當 $a > b$ 其值定義為

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

而當 $a = b$ 時，$\int_a^a f(x) = 0$（注：若定積分是利用函數 $F(x)$ 作定義的，則這些結果可視為定理；則 $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$ 及 $F(a) - F(a) = 0$）

教師應示範例題並加以說明以幫助學生充分明白。以下的例題可作參考。

例一 $\int_a^b e^x dx$

若使用相等的區間 $x_i = \dfrac{b-a}{n} = h$（設），則 $x_0 = a$，$x_1 = a + h$，…，$x_i = a + (i-1)h$。

設 ξ_i 為 x_{i-1}，即 $\xi_i = a + (i-1)h$。由於 $\max \Delta x_i = \Delta x_i = h$，

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}h = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)h}h = \lim_{h\to 0} he^a \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{nh}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{b-a}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h(e^b-e^a)}{(e^h-1)}$$

$$= (e^b - e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = e^b - e^a$$

例二 $\int_a^b x^m dx$，$m \neq -1$

考慮 n 個區間其中 $x_0 = a$，$x_1 = ar$，…，$x_i = ar^i$，$x_n = ar^n = b$。當 $n \to \infty$，$b = ar^n$ $\Longleftrightarrow r = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ 因此 $r \to 1$，同時 $\max \Delta x_i = \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = ar^n - ar^{n-1} = ar^n(1 - r^{-1}) = b(1 - r^{-1}) \to 0$。

設 $\xi_i = x_{i-1} = ar^{i-1}$

$$\int_a^b x^m dx = \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n}(ar^{i-1})^m(ar^i - ar^{i-1})$$

$$= \lim_{r\to 1}\sum_{r=1}^{n} a^{m+1} r^{(m+1)(i-1)}(r-1)$$

$$= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)\cdot\frac{r^{(m+1)n}-1}{r^{m+1}-1}$$

$$= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r^{(m+1)n}-1)\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$$

$$= \lim_{r\to 1}(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$$

$$= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m}$$

$$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

其後，教師仍須詳述下列各點：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是連續的，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為可積的；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是有界的和單調的，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是可積的。

5.2 定積分的基本性質

教師可幫助學生從定義推導下列結果：

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，其中 k 為常數。

(2) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx$。

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 而 c 是在區間 [a，b] 內或外任一點。

(4) 若在 [a，b]，對應於所有 x 的值，$f(x) \geqslant g(x)$，則 $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$。

(5) 若在 [a，b]，對應於所有 x 的值，$|f(x)| \leqslant \varnothing(x)$，

則 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \varnothing(x)dx$。

其中的特例有 (a) 若 $\varnothing(x) = |f(x)|$，則 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$。

(b) 若 $\varnothing(x) = M$，而 M 為常數，則 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M(b-a)$。

可和學生討論一些簡單而直接的應用如下：

(1) 若對 $x>0$，f(x) 是正的和單調遞增的，試證明 $f(n+1) \leqslant \int_n^{n-1} f(x)dx \leqslant f(n)$。

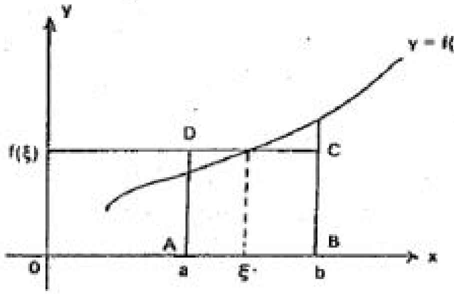
(2) $\left|\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx\right| \leqslant \frac{\pi}{4n}$。

5.3 積分的中值定理

此定理宜以一簡化的形式表達，即如：

若 f(x) 在 [a，b] 是連續的，則在 (a，b) 中存在一數 ξ，而且 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi).(b-a)$

從附圖中可容易看出要傳達的概念。學生應不難明白 $f(\xi)(b-a)$ 原來的意義就是矩形 ABCD 的面積。



如果想要一較形式化的證明，則可以用 5.2 所提及的性質和連續函數的性質，而其中特別可用介值定理。

5.4 積分基本定理與其於計算積分的應用

積分的第一基本定理如下：

設 f(x) 在 [a，b] 是連續的及

設 F(x) 的定義為 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，其中 $a \leqslant x \leqslant b$，

則 (i) F(x) 在 [a，b] 是連續的

(ii) F(x) 在 (a，b) 是可微的和 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$。

亦可以簡化的形式如下：

若 f(x) 是連續的，則函數 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是可微的且其導數相等於被積函數當在積分上限時的數值，即 $F'(x) = f(x)$。

教師應和學生詳細討論而學生可在教師指導之下引用積分的中值定理來證明此定理。

(註：教師應在教授此定理之後立即詳述下列各點：
(1) 若一函數 F(x) 的導數與被積函數 f(x) 是相等的，則 F(x) 被稱為 f(x) 的原函數。
(2) 若同一被積函數的兩個原函數為 F(x) 和 G(x)，則 $F(x) - G(x)$ 的導數是恒等於零的，因此 $F(x) - G(x)$ 是常數。)

至於積分的第二基本定理，教師亦可以同樣手法幫助學生導出。可考慮下列的方式：

設 f(x) 和 F(x) 在 [a，b] 是連續的；

若對於 $a < x < b$，$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$，則對於 $a < x \leqslant b$

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$，而其中 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

教師應示範一些有啟發性的例題以增強學生對上述定理的全面理解。在計算定積分時一方面將其視為一無限的總和而另一方面可求有關的原函數作為另一方法。由此可以提高學生對利用微分的逆運算來計算積分的認識。

教師可先用簡單的例題如

$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

而最後用其他有趣的應用題如下：

(1) 若考慮 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在區間 [1，2]，則可以建立以下的結果

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \to \ell n\,2$ 當 $n \to \infty$，

(2) 若考慮 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 (0，1)，則可以證明當 $n \to \infty$ 時，$n\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{r^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$。

5.5 不定積分法

作為上述的延續，學生應將注意力集中在求原函數的機械程式作為計算定積分的另一方法。代表f(x)的不定積分的記號 $\int f(x)dx$ 應介紹如下：

若 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 成立，則稱F(x)為f(x)的不定積分，且記為 $F(x) = \int f(x)dx$。

教師亦應指出f(x)的不定積分不是唯一的及若F(x)是f(x)的一個不定積分，則F(x)+c (其中c是一常數)是另一個，而以 $\int f(x)dx$ 作為f(x)的原函數。

學生應能夠運用下列公式求不定積分，事實上，教師可鼓勵學生導出部份或全部分式。

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$，$n \neq -1$	(11) $\int \tan x\, dx = \ell n \mid \sec x \mid + c$
(2) $\int \frac{dx}{x} = \ell n(x) + c$	(12) $\int \cot x\, dx = \ell n \mid \sin x \mid + c$
(3) $\int e^x dx = e^x + c$	(13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$
(4) $\int a^x dx = a^x \ell n\, a + c$	(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$
(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$	
(6) $\int \cos x dx = \sin x + c$	
(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$	
(8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$	教師亦可提醒學生以下性質：
(9) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$	(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，其中k是一常數
(10) $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$	(2) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5.6 求積分的方法

(A)代換法

教授代換法時，對代換公式 $\int f(u)du = \int f[g(x)]g'(x)dx$ 無需作嚴謹的證明，但教師宜開始時先用簡單和明顯的例子如下：

$\int \frac{dx}{x+1}$、$\int (x+1)^{10}dx$、$\int \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$、$\int \sin^5 x \cos x\, dx$、$\int \frac{dx}{x\,\ell n\, x}$ 等。

在某些積分中，當g′(x)並不明顯時，g(x)是要推測出來的，例如

$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx$、$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 等。

學生須透過大量有關的練習以發展這些技巧，以下是一些例子

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$

(2) $\int \frac{dx}{\cot x + \operatorname{cosec} x}$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ (設 $u = e^x$)

(4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (設 $u = e^x + 1$)

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 其中b > a (設 $x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$)

(6) $\int_0^1 \frac{\ell n(1+x)dx}{1+x^2}$ (設 $x = \tan\theta$)

教師亦應和學生討論下列有用的結果，並舉實例說明：

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ 而其中 $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

(2) 若 $f(x) = f(a-x)$，則 $\int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$

而其中 $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

(3) 若f(x)是一週期w的週期函數，則 $\int_a^{a+w} f(x)dx = \int_0^w f(x)dx$

(4) 若f(x)是一偶函數，則 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(5) 若f(x)是一奇函數，則 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

可考慮下列有關的例題：

(1) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$　　(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(3) 證明 $\int_0^a x^m (a-x)^n dx = \int_0^a x^n (a-x)^m dx$，並由此計算 $\int_0^8 x^2 \cdot \sqrt[3]{8-x}\, dx$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x\, dx$

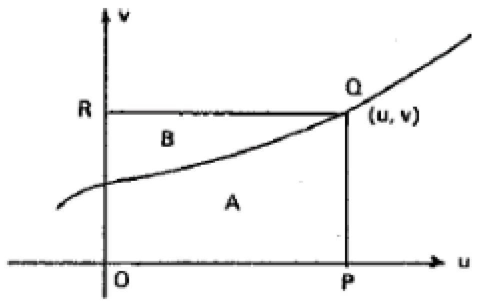
(5) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ 並由此計算此積分。

(6) 證明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}$

(B)分部積分法

分部積分的公式 $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx$ 或 $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

可利用直觀幾何的方法來證明。



圖中提供上述公式一個非形式化的幾何解釋：

$\int v\,du$ 代表區域 A 的面積；

$\int u\,dv$ 代表區域 B 的面積；

uv 代表 OPQR 的面積

而由此可得出上述公式。

應用具代表性的例題作說明時可包括 $\int xe^x dx$、$\int x \sin x dx$ 和 $\int \ell n\, x dx$。

學生混合使用代換法和分部積分的公式，就可以處理很多種類的積分，例如：

(1) $\int e^{ax} \cos bx\, dx$　　(4) $\int_0^1 \sin^{-1} x dx$

(2) $\int \tan^{-1} x\, \ell n(1+x^2) dx$　　(5) $\int_0^1 x \tan^{-1} x\, dx$

(3) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\, \ell n\, x dx$　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \sin x\, dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$

(C) 歸約公式

歸約公式是用一組函數中較簡單的函數的積分來表達函數組中任一函數的積分。歸約公式通常是利用分部積分的方法求得。在三角函數的積分中此法被廣泛利用。可考慮下列具代表性的例題：

(1) 設 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ 可記為 I_n，證明 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$，$n \geq 2$。由此計算 I_4 的　值。

(2) 設 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，求 I_n 的歸約公式，然後計算 $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ 的值。

(3) 若 $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$，證明對 $n > 2$，$I_n = \frac{1}{2} x^{n-1} e^{x^2} - \frac{1}{2}(n-1) I_{n-2}$。

(D) 利用部分分式計算積分

有理代數函數的積分是可先將數式分解成部分分數後完成，一般有四類分式：

$\int \frac{L dx}{ax+b}$、$\int \frac{L dx}{(ax+b)^r}$、$\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)} dx$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)^r} dx$。

學生處理前三類的分式應沒有特別的困難，但若遇到最後那類分式時，則須要應用歸約公式了。

以下是一些可作討論的例題：

(1) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\, dx$　　(2) $\int (\frac{x}{x^2-3x+2})^2 dx$

(3) 設 $I_n = \int \frac{dx}{(1-x^4)^n}$，證明當 $n \geq 1$，$4nI_{n+1} = (4n-1) I_n + \frac{x}{(1-x^4)^n}$ 並求 $\int \frac{x^8}{(1-x^4)^4} dx$ 的值。

5.7 廣義積分

應介紹廣義積分的基本概念而學生預期可認識第一類廣義積分，即

$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x) dx$ 或 $2\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x) dx$ 並可簡單記為 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ 或 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

及第二類廣義積分，即 當 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^b f(x) dx$ 和

當 $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x) dx$

屬於第一類而具代表性的例子有：(1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x}$　(2) $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2}$

教師宜提出 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ 作例題，但指明這不是一廣義積分因其極限並不存在。

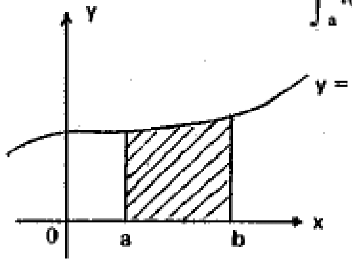
第二類廣義積分的例題有 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 和 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$。

同樣地，教師可用 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 作說明，這亦不是一廣義積分因其極限亦不存在。

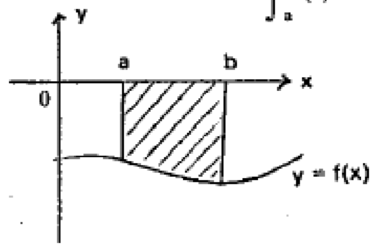
B6 積分法的應用 --- 6.1 平面面積

作為定積分定義的延續，由曲綫 y=f(x)、垂直綫 x=a、x=b 及 x 軸包圍的面積可以根據有關函數的性質(即函數圖像在 x－軸之上或之下)用下列方法計算出來。

情況 (1)：當 y=f(x) 在區間 [a，b] 內連續及非負，則面積可以下式表示 $\int_a^b f(x)dx$

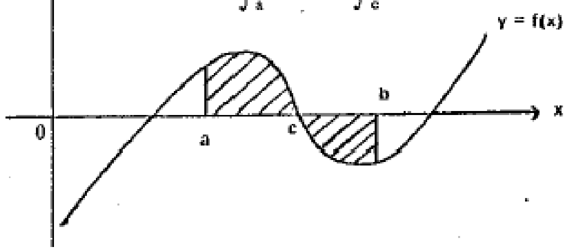


情況 (2)：當 y=f(x) 在區間 [a，b] 內連續及非正，則面積可以下式表示 $-\int_a^b f(x)dx$



情況 (3)：當 y=f(x) 在區間 [a，b] 內連續及取值時正時負，則可以下列簡例的程序求其面積。

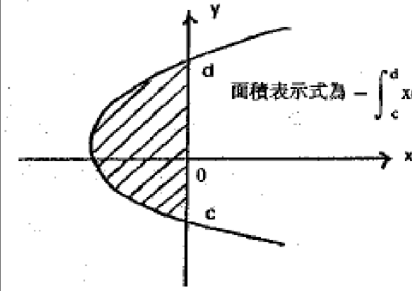
面積表示式為 $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$。



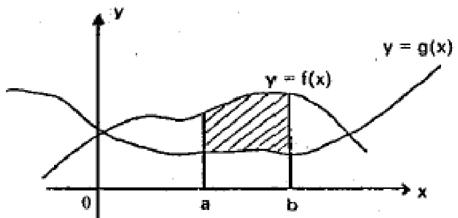
教師宜提醒學生在計算圖像在 x－軸之下的面積時應留意加入負號，並應鼓勵學生先作函數草圖以獲得更清晰的了解。

教師也應就曲綫圖像與 y－軸所圍成的面積的各個不同情況詳加闡釋，下面是一個例子。

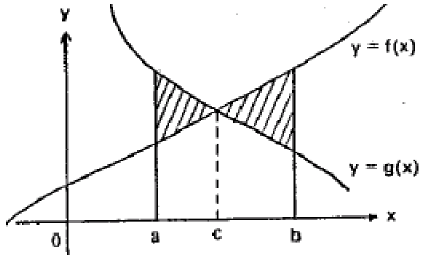
面積表示式為 $-\int_c^d xdy$。



至於由二個曲綫所圍成的面積的計算，教師可與學生詳細討論下列圖示的方法及其變着，並應利用足夠的例子加以說明。



面積 = $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$



面積 = $\int_a^c [g(x)-f(x)]dx + \int_c^b [f(x)-g(x)]dx$

補充資料:

參數方面表示的面積公式:

$A=\int_a^b |y|\,dx = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\,|x'(t)|dt$

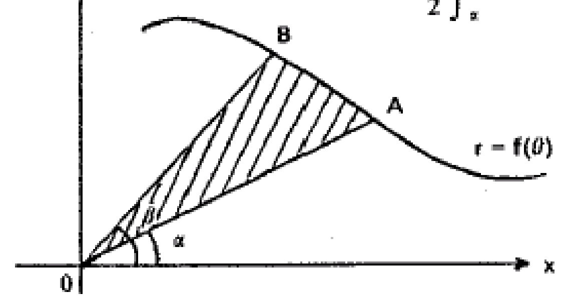
其中 x=x(t)，y=y(t)，

而 a=x(t_1)，b=x(t_2)

另外,兩個極方程間的面積

$=\frac{1}{2}\int_a^b (r_1^{\,2}-r_2^{\,2})dq$

當曲綫以極方程 r=f(θ) 表示，則曲綫與兩半徑圍成的面積為 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$。



當曲綫以參數方程形式表示時，例如 x=x(t)；y=y(t)，則所圍成的面積以下式表示 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt})dt$，其中 A 及 B 點的參數分別為 t_0 及 t_1。

要令學生掌握計算面積的技巧，教師宜引入更多例子，包括不同方法及其變着，使學生有更深入的了解。下列例子可加入考慮：

(1) 求拋物綫 $y^2=5-x$ 及直綫 $y=x+1$ 所圍成的面積。(註：此面積可以對 x 或對 y 積分而求得，教師宜示範兩個方法。)

(2) 證明心臟綫 $r=a(1+\cos\theta)$ 所圍成之面積為 $\frac{3a^2\pi}{2}$。

(3) 利用橢圓的參數方程 $x=a\cos\theta$；$y=b\sin\theta$，證明橢圓的面積為 πab。(註：教師宜指導學生利用圖像的特別幾何性質，例如對稱性質，去簡化計算過程。)

6.2 弧長

曲綫 y=f(x) 在兩點 x=a 及 x=b 之間的弧長以 $\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表示。

若曲綫以參數形式 x=x(t)；y=y(t) 表示，則由 $t=t_1$ 至 $t=t_2$ 之間的弧長為

$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$。

若曲綫以極形式 r=r(θ) 表示，則由 θ=α 至 θ=β 之間的弧長為 $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$。

教師可用下列建議的例子作說明或與學生討論之用。

(1) 證明閉合曲綫(星形綫) $x=a\cos^3\theta$；$y=a\sin^3\theta$ 的周界為 6a。(曲綫圖形的對稱性可加利用)

(2) 證明心臟綫 $r=a(1+\cos\theta)$ 的周界長度為 4a。

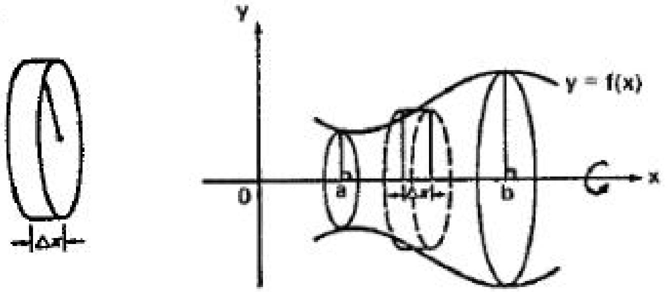
(3) 求曲綫 $x^3=8y^2$ 由 x=1 至 x=3 的弧長。

有關第一類及第二類橢圓積分,由於屬考試範圍以外,此處從略(書 p.439-440)
如果曲線並不光滑,我們將需要分段計算弧長.

6.3 旋轉體的體積

在教授旋轉體的體積時，教師宜與學生討論旋轉體的形成及其意義，同時也應引入旋轉軸這名詞，好讓學生能認識及分辨由某個曲線綫段或面積沿着某一旋轉軸旋轉而成的旋轉體，之後教師可教授下列兩個常用計算旋轉體的體積的方法：

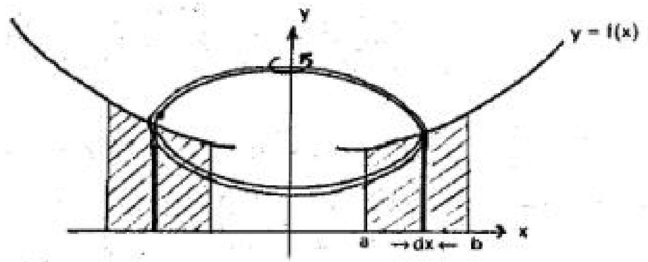
(1) 圓盤法



教師宜向學生強調圓盤元素體積 ΔV 或 dV 的公式為 $dV=\pi y^2 dx$，它代表圓盤的體積。整個固體的體積為 $\pi\int_a^b y^2 dx$。教師更可向學生介紹曲綫沿 $y-$ 軸旋轉所形成的體積是 $\pi\int_c^d x^2 dy$。

注意! 如果旋轉軸不是坐標軸,則 $V=p\int_a^b (y-h)^2 dx$,其中,h 為旋轉軸.

(2) 外殼法



在這裏，元素體積是 $2\pi xydx$ 及整體體積為 $2\pi\int_a^b xydx$。

有些情形，旋轉體的體積可能由曲綫沿着 $x-$ 軸或 $y-$ 軸以外的綫旋轉或將兩曲綫圍成的面積旋轉所形成，所以教師宜利用例子將各種可能情況加以闡明，並推導下列公式供學生參考。

$$\pi\int_a^b \{[f(x)]^2-[g(x)]^2\}dx \text{ 或 } \pi\int_c^d \{[f(y)]^2-[g(y)]^2\}dy$$

教師宜提供足夠的例子作說明，下列例子可作參攷。

(1) 證明由橢圓 $x=a\cos\theta$；$y=b\sin\theta$ 沿 $x-$ 軸旋轉所形成的體積是 $\frac{4}{3}\pi ab^2$。
(註：教師可要求學生從結果引申出半徑為 r 的圓球體體積。)

(2) 求將曲綫 $y=x^3$、直綫 $x=2$ 及 $x-$ 軸所圍成的面積沿直綫 $x=2$ 旋轉所形成的體積。
(註：教師可用圓盤法和外殼法兩個方法解這問題。)

6.4 旋轉體的表面面積

將曲綫 $y=f(x)$ 上由 $x=a$ 至 $x=b$ 的弧沿 $x-$ 軸旋轉所產生的表面面積是 $2\pi\int_a^b yds$ 其中 ds 是弧長的元素，該面積公式通常以 $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$ 表達。若同樣的弧長沿 $y-$ 軸旋轉，表面面積為 $2\pi\int_c^d xds$ 或 $2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy$ 其中 c 及 d 分別為該弧末端的縱坐標。

若曲綫以極形式表示並以 θ 為自變量，則面積為 $2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{d\theta}d\theta$ 其中 $y=r\sin\theta$ 及 $\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$。同樣地，若曲綫以參數形式 $x=x(t)$；$y=y(t)$ 表示，由 $t=t_0$ 至 $t=t_1$ 之曲綫部分長度沿 $x-$ 軸旋轉所形成的表面面積是

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt \text{。}$$

6.5 和的極限

這是一個應用定積分有趣的課題。教師宜利用一些簡單但明顯的例子如

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}$$

作為引入，並提供適當的提示，使學生能發現合適的定積分、積分區間與恰當的分割，而最重要是能選取正確的被積函數，來表示無限級數的極限。對此例而言，被積函數為 $f(x)=x$，區間為 $[0, 1]$ 而分割為 $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$。

學生不難發現下列結果：
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

務求使學生獲得更深入的了解及增進他們的運算技巧。下列是一個值得與學生討論的例子：

求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。先將它轉換為 $\ell n\, y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ell n(\frac{i}{n})$，其中 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $=\int_0^1 \ell n\, xdx=-1$ 故得 $y=e^{-1}$	(註：教師教授此部份時，可令學生參考單元 B5，使他們能與黎曼和作爲和的極限聯繫起來。) 教師必須提醒學生並不是所有和的極限都可此法解答，調和級數，$\Sigma\frac{1}{n}$ 是其中一個例子。

B7：解析幾何

7.1 基本解析幾何知識

學生除了對中學數學解析幾何內容有所認識外，學習此單元的其他課題應先掌握下列知識：

(1) 外分點；

(2) 直綫圖形的面積 $\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$；

(3) 求兩直綫的交角時所用公式 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$；

(4) 直綫的法綫式；

(5) 兩直綫之間的角平分綫；

(6) 直綫族及

(7) 圓族。

學生應懂得極坐標系及直角坐標系之間的轉換，並應掌握曲綫方程在兩個坐標系之間的轉換方法。

由極坐標轉為直角坐標：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

由直角坐標轉為極坐標：$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$，其中 $x\neq 0$，並且 θ 是由 (x, y) 所在的象限決定。

7.2 於極坐標系的曲線描繪

學生應懂得極坐標曲綫方程的繪圖，因為在「積分的應用」一課中需要對這種繪圖法有基礎認識，以下是一些學生應懂得繪畫的簡易極形式曲綫方程：

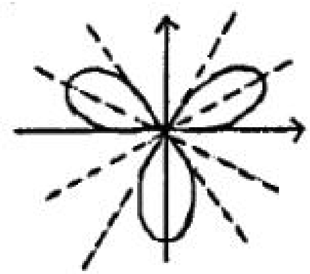
(1) 直綫： $\theta=k$，其中 k 為一正常數；
$r\cos\theta=a$ （垂直於 x－軸的直綫）

(2) 圓： $r=k$，其中 k 為一正常數；
$r=\sin\theta$

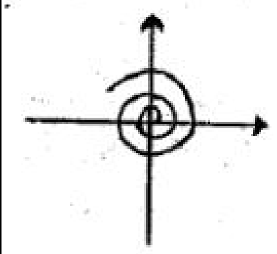
(3) 拋物綫： $r(1+\cos\theta)=k$，其中 k 為一常數

(4) 心臟綫： $r=a(1-\cos\theta)$，其中 a 為一常數

(5) 玫瑰曲綫：$r=a\sin3\theta$



(6) 螺綫： $r=\theta$



7.3 於直角坐標系的圓錐曲線

學生應可以分別各圓錐曲綫的標準方程，包括：

$y^2=4ax$ （拋物綫）

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （橢圓）

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ （雙曲綫）

$xy=c^2$ （等軸雙曲綫）

其參數表達形式亦應加以學習，包括：

$y=r\sin\theta$；	$x=r\cos\theta$	（圓）
$y=b\sin\theta$；	$x=a\cos\theta$	（橢圓）
$y=b\tan\theta$；	$x=a\sec\theta$	（雙曲綫）
$y=\frac{c}{t}$；	$x=ct$	（等軸雙曲綫）
$y=2at$；	$x=at^2$	（拋物綫）

對雙曲綫的漸近綫亦需要有所認識，而對圓錐曲綫的其他性質例如離心率、焦點及準綫等亦可教授但不需特別強調。

7.4 圓錐曲線的切線及法線

學生應懂得運用不同方法去找出圓的切綫。經過簡單圓形 $x^2+y^2=a^2$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $x_1x+y_1y=a^2$，其法綫方程則為 $x_1y-y_1x=0$。這些基本結果的導數亦可在此介紹以啟發學生思考及計算如以下的例子以強調其基礎方法：

計算經過圓形 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程，

(i) 可利用切綫與圓形半徑的垂直關係；

(ii) 設切綫方程為 $y=mx+k$，利用聯立方程 $\begin{cases} y=mx+k \\ x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \end{cases}$ 有等根的關係。

並應注意到方法 (ii) 是可以應用於一點 (x_1, y_1) 不在圓形的情況上。由此可以得到經過圓形 $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$。若將其結果普及，應可得到下列結果：

(a) 經過拋物綫 $y^2=4ax$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $y_1y=2a(x+x_1)$

(b) 經過橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

(c) 經過雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

(d) 經過等軸雙曲綫 $xy=c^2$ 上一點 (x_1, y_1) 的切綫方程為 $y_1x+x_1y=2c^2$

在找到切綫方程後，學生應對法綫方程問題上不會有任何困難的。

當二次曲綫方程是以參數式表達時，其有關的結果亦應考慮。教師應引導學生找出下列結果：

(a) 拋物綫 $\begin{cases} x=at^2 \\ y=2at \end{cases}$ 的切綫方程為 $y=\frac{x}{t}+at$

(b) 橢圓 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ 的切綫方程為 $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$

(c) 雙曲綫 $\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ 的切綫方程為 $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$

(d) 等軸雙曲綫 $\begin{cases} x=ct \\ y=\frac{c}{t} \end{cases}$ 的切綫方程為 $x+t^2y=2ct$。

為了使到學生能理解基本概念，並能掌握和運用所學技巧，切點弦的基本概念亦應予以討論。

7.5 於直角坐標系的軌跡問題

學生應對一組能夠符合一系列的限制條件而又能利用直角坐標方程來表達的點的軌跡方程加以學習，例如：

(1) 當一點與一固定點的距離不變，其移動的軌跡為一圓形。
(2) 當一點與一固定點及一固定直綫之間的距離相等，其移動的軌跡為一拋物綫。
(3) 當圓形在一直綫上滾動時，圓周上一點的軌跡為旋輪綫。

7.6 平面曲線的切線及法線

當學習了微分學後，學生應可應用微分法去計算平面曲綫在直角坐標系上的切綫和法綫方程。利用微分公式及鏈式法則，學生應可找出以隱函數式或參數式定義的曲綫的切綫和法綫方程。教師應當在這課題上作出適當安排，因應學生的能力，將這個單元作為微分學的深入應用前的引例，或作為基本微分學應用的延續。

A-Level Pure Math Note Part B <The End >
Since 2001/10/2 First Version 2001/11/14
Revision for p.7-p.8 2001/12/12 PDF edition 2002/5/12

香港學生母語學習網 http://mothert.hk.st

原刊 p.1

補充資料: 常見的序列,級數

以 a 為首項, d 為公差, **l** 為尾項

A.P.(算術/等差級數) $T_n=a+(n-1)d$

$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}(a+\mathbf{l})$

如果 A.P. = 1,2,3,4,...,n

則 H.P.(調和級數)= $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n}$

G.P.(幾何/等比級數) $T_n=ar^{n-1}$

$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r^n}=\frac{a}{1-r}$